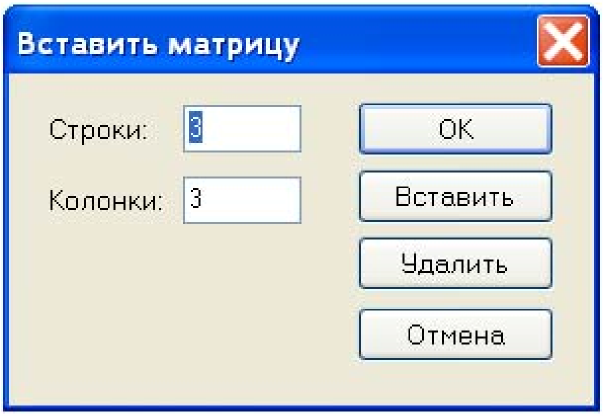
Практическое занятие 4
Матрицы в MathCAD

Цель работы: ознакомиться с использованием матриц и векторов в системе MathCAD

В задачах линейной алгебры практически всегда возникает необходимость выполнять различные операции с матрицами.
Предварительно матрицу нужно определить и ввести в рабочий документ MathCAD.

Для того чтобы определить матрицу, введите с клавиатуры имя матрицы и знак присваивания (<Shift>+<:>). Затем откройте панель операций с матрицами и нажмите кнопку **«Создать матрицу или вектор»** или выберите в меню **Вставка (Insert)** команду **Матрицу (Matix)**. В окне диалога введите число строк и столбцов и заполните значениями поле ввода матрицы.



Большинство вычислений с матрицами, как и другие вычисления в MathCAD, можно выполнять тремя способами – с помощью панелей инструментов, выбором операции в меню или обращением к соответствующей функции.

Функции вычисления различных числовых характеристик матриц:

· last(v) – вычисление номера последней компоненты вектора V;
· length(v) – вычисление количества компонент вектора V;
· rows(A) – вычисление числа строк в матрице A;
· cols(A) – вычисление числа столбцов в матрице A;
· max(A) – вычисление наибольшего элемента в матрице A;
· min(A) – вычисление наименьшего элемента в матрице A;

· tr(A) – вычисление следа квадратной матрицы A (след матрицы равен сумме ее диагональных элементов);
· rank(A) – вычисление ранга матрицы A;
· norm1(A), norm2(a), norme(A), normi(A) – вычисление норм квадратной матрицы A.

Функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

· rref(A) – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные операции со стоками матрицы);
· eigenvals(A) – вычисление собственных значений квадратной матрицы A;
· eigenvecs(A) – вычисление собственных векторов квадратной матрицы A; значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матрицы A, причем порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных функцией eigenvals(A);
· eigenvec(A, l) – вычисление собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению l;
· lsolve(A, b) – решение системы линейных алгебраических уравнений Ax=b.

Вычисления с использованием описанных функций выполняются стандартным для MathCAD способом. Чтобы обратиться к функции, введите с клавиатуры имя функции, перечислите в скобках ее аргументы, введите знак равенства и щелкните по свободному месту в рабочем документе вне выделяющей рамки. Результат вычислений (число, вектор, матрица) будет отображен в рабочем документе справа от знака равенства.

<u>Задание 1</u>

1. Создать матрицу A заданной размерности n*m (матрицу заполнить самостоятельно).
2. Транспонировать матрицу A.
3. Вычленить из матрицы A i-ый и j-ый столбцы и найти их сумму и скалярное произведение.

$ORIGIN := 1$

$X_1 := 5 \quad X_2 := 8 \quad X_3 := 10$

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$A_{1,1} := 0.1 \quad A_{1,2} := -2.5 \quad A_{2,1} := -1.0 \quad A_{2,2} := 5.2$

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -2.5 \\ -1 & 5.2 \end{pmatrix}$$

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Определение матрицы А размерностью 4x4

$A_{2,2} = 3$ Значение элемента матрицы А, (2-я строка, 2-й столбец)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.375 & -0.125 & 0.25 \\ -0.313 & 0.469 & 0.031 & 0.063 \\ 0.5 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.063 & 0.094 & 0.406 & -0.188 \end{pmatrix}$$ Обратная матрица

$|A| = 64$ Определитель матрицы А

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Транспонирование матрицы А

Иногда (например, при построении графиков) требуется выделить вектор, представляющий собой столбец матрицы. Номер столбца матрицы отображается как верхний индекс, заключенный в угловые скобки: например $\mathbf{H}^{\langle 2 \rangle}$.

$$ORIGIN := 1$$

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Определение матрицы H размерностью 3x3

$$M := H^{\langle 2 \rangle} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Выделение второго столбца матрицы A

$$\sin(M) = \begin{pmatrix} 0.909 \\ 0 \\ 0.841 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sin(M)} = \begin{pmatrix} 0.909 \\ 0 \\ 0.841 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sin(H) = \blacksquare} \qquad \overrightarrow{\sin(H)} = \begin{pmatrix} 0.841 & 0.909 & 0 \\ 0.909 & 0 & 0.141 \\ 0.141 & 0.841 & 0.909 \end{pmatrix}$$

This value must be a vector.

$$M \cdot K = 10$$ Скалярное произведение

$$\overrightarrow{(M \cdot K)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Поэлементное умножение вектора на вектор

Для матриц определены сложение, умножение на число, перемножение и другие операции. Допустимо использование матриц вместо скалярных выражений: в этом случае предполагается, что указанные действия должны быть применены к каждому элементу матрицы, и результат также представляется в виде матрицы.

<u>Задание 2</u>

Дано решение для одного значения *d*:

$$\rho := 1000 \quad \xi := 1 \quad d := 0.1 \qquad K := \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot d^4}{16 \cdot \xi \cdot \rho}} \qquad K = 3.512 \times 10^{-4}$$

для ряда значений *d* организовать вычисления с использованием матрицы; построить график зависимости *K = f(d)*.

d = 0.1; 0.097; 0.01; 0.056; 0.043; 0.033; 0.025; 0.08.

Для работы с элементами матрицы используют индексы элементов. Нумерация строк и столбцов матрицы начинается с нуля, что задается системной переменной ORIGIN, и может быть изменено пользователем (например, блок ORIGIN:=1 устанавливает начальный индекс равным единице). Индекс элемента задается числом, переменной или выражением и отображается как нижний индекс. Он вводится после щелчка на кнопке **Индекс** (Subscript, x_n) на панели инструментов **Матрица** (Matrix) или нажатием символа "[" после имени массива. Индексы двумерных матриц записываются через запятую.

Задание 3

Решить систему линейных уравнений при помощи правила Крамера:

$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$,

$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9$,

$2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5$,

$x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$.

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующие действия:

1. Сформировать матрицу системы $\boldsymbol{A}$ и вектор правых частей $\boldsymbol{b}$.
2. Вычислить главный определитель Δ.
3. Сформировать вспомогательные матрицы (удобно скопировать матрицу $\boldsymbol{A}$ несколько раз и последовательно заменять в ней столбцы на вектор $\boldsymbol{b}$) для вычисления определителей Δ_i;
4. Вычислить определители Δ_i;
5. Найти решение системы по формуле $x_i = \Delta_i / \Delta$.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запись системы в матричном виде

$$\Delta := |A| \qquad \Delta = 27$$

Главный определитель системы отличен от нуля

$$A1 := \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A3 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Формирование вспомогательных матриц

Вычисление определителей вспомогательных матриц

$$\Delta 1 := |A1| \qquad \Delta 2 := |A2| \qquad \Delta 3 := |A3| \qquad \Delta 4 := |A4|$$

$$\Delta 1 = 81 \qquad \Delta 2 = -108 \qquad \Delta 3 = -27 \qquad \Delta 4 = 27$$

Решение системы по формулам Крамера

$$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \qquad x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \qquad x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \qquad x4 := \frac{\Delta 4}{\Delta}$$

$$x1 = 3 \qquad x2 = -4 \qquad x3 = -1 \qquad x4 = 1$$

Задание 4.

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

Необходимо:

1. Сформировать матрицу коэффициентов и вектор свободных членов системы.

2. Решить систему, представив вектор неизвестных как произведение матрицы, обратной к матрице системы и вектора свободных членов.

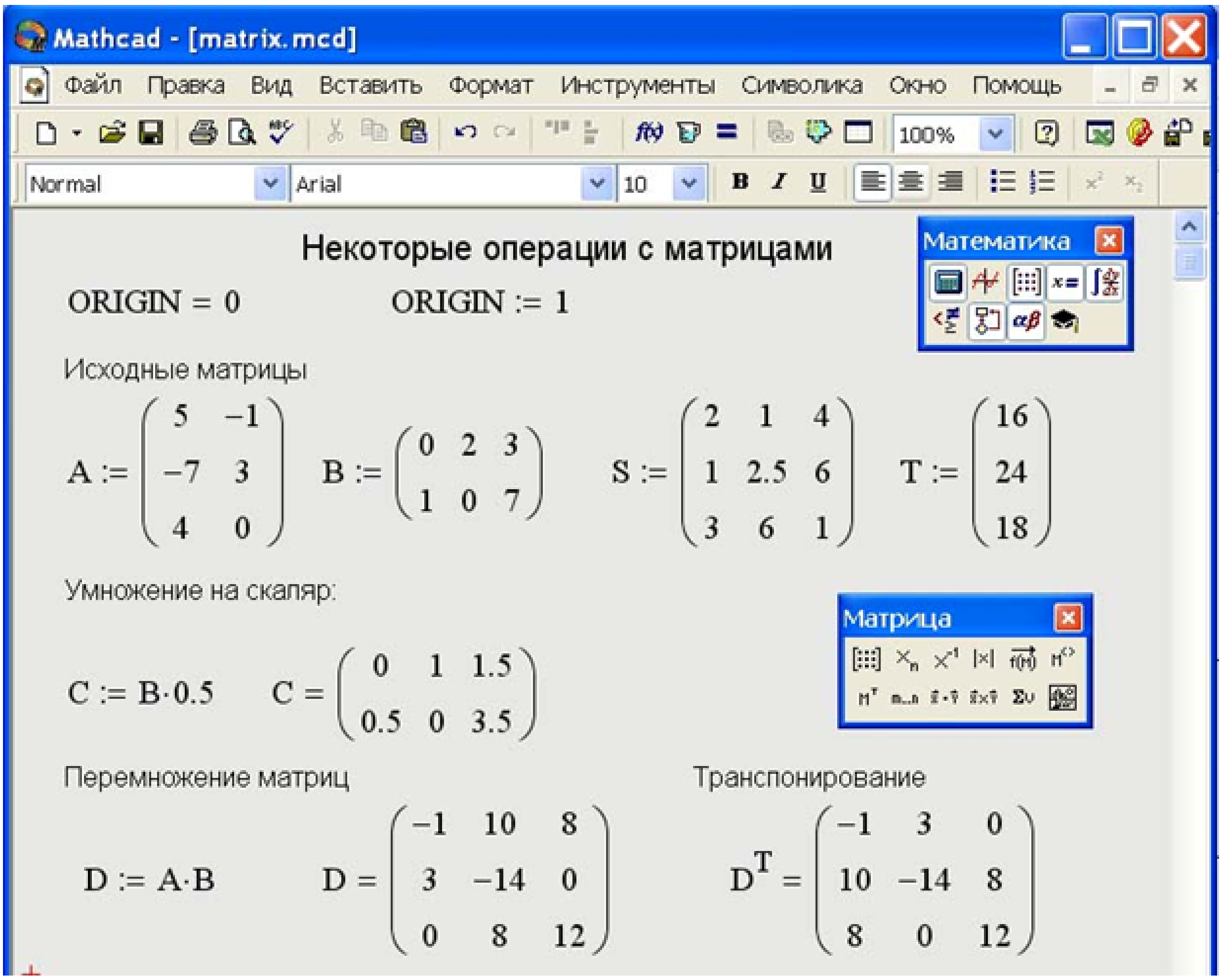
$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение системы

Проверка

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приведены примеры реализации некоторых операций с матрицами.



Вычисление определителя

$$|S| = -56$$

Вычисление обратной матрицы

$$F := S^{-1} \qquad F = \begin{pmatrix} 0.598 & -0.411 & 0.071 \\ -0.304 & 0.179 & 0.143 \\ 0.027 & 0.161 & -0.071 \end{pmatrix}$$

Замена одного столбца на вектор

$$Y := S \qquad Y^{\langle 2 \rangle} := T \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 4 \\ 1 & 24 & 6 \\ 3 & 18 & 1 \end{pmatrix} \qquad x := \frac{|Y|}{|S|} \qquad x = 2$$

Векторное произведение

$$V1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad V2 := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 5 \\ 12.6 \end{pmatrix} \qquad V1 \cdot V2 = 78.2$$

Выравнивание влево AUTO NUM Лист 1